第 2 节 距离公式（★★）

强化训练

1．（★）若直线 $l_1: x+my+1=0$ 和直线 $l_2: 2x-y-1=0$ 平行，则它们之间的距离为_____.

答案：$\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

解析：已知两直线平行，可先由 $A_1B_2=A_2B_1$ 求出 m，

因为 $l_1 \parallel l_2$，所以 $1\times(-1)=2m$，解得：$m=-\dfrac{1}{2}$，

所以 l_1 的方程为 $x-\dfrac{1}{2}y+1=0$，

要代公式算 l_1 与 l_2 的距离，先把系数调整为一致，

$l_1: 2x-y+2=0$，故所求距离 $d=\dfrac{|2-(-1)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

2．（2023•江苏南京模拟•★★）（多选）已知直线 $l_1: 2x+y-6=0$ 和点 $A(1,-1)$，过点 A 作直线 l_2 与直线 l_1 相交于点 B，且 $|AB|=5$，则直线 l_2 的方程为（　　）

（A）$x=1$　　（B）$y=-1$　　（C）$3x+4y+1=0$　　（D）$4x+3y-1=0$

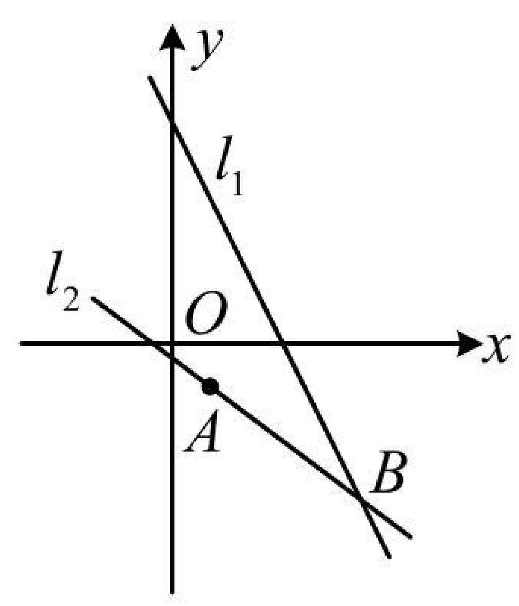
答案：AC

解析：如图，直线 l_2 过 A，B 两点，已知 A，要求 l_2 的方程，只需求 B，可设其坐标，用 $|AB|=5$ 建立方程，

$l_1: 2x+y-6=0 \Rightarrow y=6-2x$，故可设 $B(a,6-2a)$，则 $|AB|=\sqrt{(a-1)^2+(6-2a+1)^2}=5$，解得：$a=1$ 或 5，

当 $a=1$ 时，$B(1,4)$，所以 l_2 的方程为 $x=1$；

当 $a=5$ 时，$B(5,-4)$，所以 $k_{AB}=\dfrac{-4-(-1)}{5-1}=-\dfrac{3}{4}$，故 l_2 的方程为 $y-(-4)=-\dfrac{3}{4}(x-5)$，即 $3x+4y+1=0$.



3．（★★）已知 $A(1,1)$，$B(4,3)$，$C(-2,0)$，则 ΔABC 的面积为_____.

答案：$\dfrac{3}{2}$

解析：已知 A，B，C 的坐标求面积，不妨由两点距离公式算 $|AB|$，作为底边，点 C 到直线 AB 的距离作为高，

由题意，$|AB|=\sqrt{(1-4)^2+(1-3)^2}=\sqrt{13}$，又 $k_{AB}=\dfrac{3-1}{4-1}=\dfrac{2}{3}$，

所以直线 AB 的方程为 $y-1=\frac{2}{3}(x-1)$，即 $2x-3y+1=0$，

故点 C 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|2\times(-2)-3\times0+1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$，

所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\times\sqrt{13}\times\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{3}{2}$.

4．（★★）经过原点 O，且与 $A(1,2)$ 和 $B(-2,4)$ 两点距离相等的直线 l 的方程为_____.

答案：$6x+y=0$ 或 $2x+3y=0$

解法 1：已知一个点求直线的方程，可设斜率，先考虑斜率不存在的情形，

当 l 的斜率不存在时，其方程为 $x=0$，经检验，A，B 两点到 l 的距离不相等，不合题意；

当 l 的斜率存在时，设其方程为 $y=kx$，即 $kx-y=0$，由题意，$\frac{|k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|-2k-4|}{\sqrt{k^2+1}}$，解得：$k=-6$ 或 $-\frac{2}{3}$，

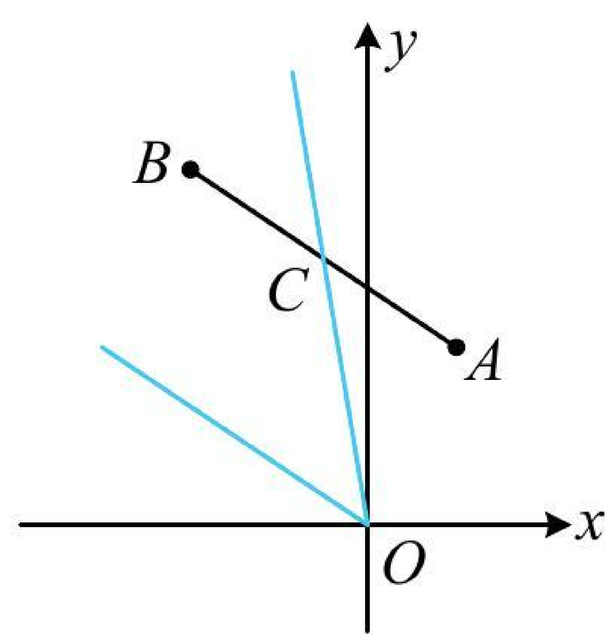
所以直线 l 的方程为 $6x+y=0$ 或 $2x+3y=0$.

解法 2：也可画图分析，如图，满足条件的直线 l 有平行于 AB 和过 AB 中点两种情况，

由题意，AB 中点为 $C(-\frac{1}{2},3)$，当 l 过点 C 时，其方程为 $y=-6x$，整理得：$6x+y=0$；

当 $l\,//\,AB$ 时，$k_{AB}=\frac{2-4}{1-(-2)}=-\frac{2}{3}$，所以 l 的方程为 $y=-\frac{2}{3}x$，整理得：$2x+3y=0$，

综上所述，直线 l 的方程为 $6x+y=0$ 或 $2x+3y=0$.



5．（★★）设直线 $l:3x-4y+2m=0$ 与直线 $l':6x-my+1=0$ 平行，则点 $A(a^2,3a)$ 到 l 的距离的最小值为（　　）

（A）$\frac{4}{5}$　　（B）1　　（C）$\frac{6}{5}$　　（D）$\frac{7}{5}$

答案：A

解析：条件有两直线平行，可由 $A_1B_2=A_2B_1$ 求参数 m，

因为 $l\,//\,l'$，所以 $3\times(-m)=6\times(-4)$，故 $m=8$，

经检验，l 与 l' 不重合，故 l 的方程为 $3x-4y+16=0$，

所以点 A 到 l 的距离 $d=\frac{|3a^2-4\times3a+16|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|3a^2-12a+16|}{5}$

$=\frac{|3(a-2)^2+4|}{5}=\frac{3(a-2)^2+4}{5}$，

故当 $a=2$ 时，d 取得最小值 $\frac{4}{5}$.

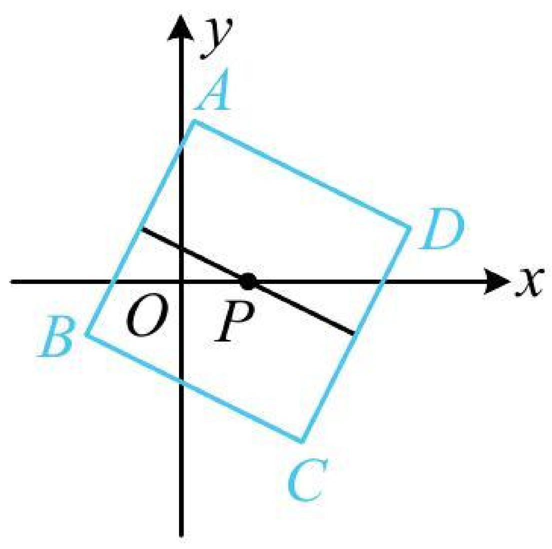
6.（2023 •四川模拟 •★★★）正方形 $ABCD$ 的中心为点 $P(1,0)$，边 AB 所在的直线的方程为 $2x-y+2=0$，则边 CD 所在直线的方程为_____.

答案：$2x-y-6=0$

解析：如图，$AB // CD$，可由此设直线 CD 的方程，并根据点 P 到直线 AB，CD 的距离相等建立方程求解，

由题意，可设直线 CD 的方程为 $2x-y+m=0(m\neq 2)$，则 $\frac{|2+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|2+m|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$，解得：$m=-6$ 或 2，

又 $m\neq 2$，所以 $m=-6$，故直线 CD 的方程为 $2x-y-6=0$.



7.（2020 • 新课标III卷 • ★★★）点 $(0,-1)$ 到直线 $y=k(x+1)$ 的距离的最大值为（　　）

（A）1　（B）$\sqrt{2}$　（C）$\sqrt{3}$　（D）2

答案：B

解法 1：有点的坐标和直线的方程，可代公式把所求距离用 k 表示，再分析最值，

$y=k(x+1)\Rightarrow kx-y+k=0$，点 $(0,-1)$ 到该直线的距离

$$d=\frac{|-(-1)+k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\frac{|k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{\frac{(k+1)^2}{k^2+1}}$$

$$=\sqrt{\frac{k^2+1+2k}{k^2+1}}=\sqrt{1+\frac{2k}{k^2+1}},$$

根号里面有“$\frac{\text{一次函数}}{\text{二次函数}}$”的结构，可同除以 k，用均值不等式求最值，但需讨论 k 的正负，

当 $k\le 0$ 时，$\frac{2k}{k^2+1}\le 0$，所以 $d\le 1$；

当 $k>0$ 时，$d=\sqrt{1+\frac{2}{k+\frac{1}{k}}}\le\sqrt{1+\frac{2}{2\sqrt{k\cdot\frac{1}{k}}}}=\sqrt{2}$，当且仅当 $k=\frac{1}{k}$，即 $k=1$ 时取等号；

综上所述，所求距离的最大值为 $\sqrt{2}$.

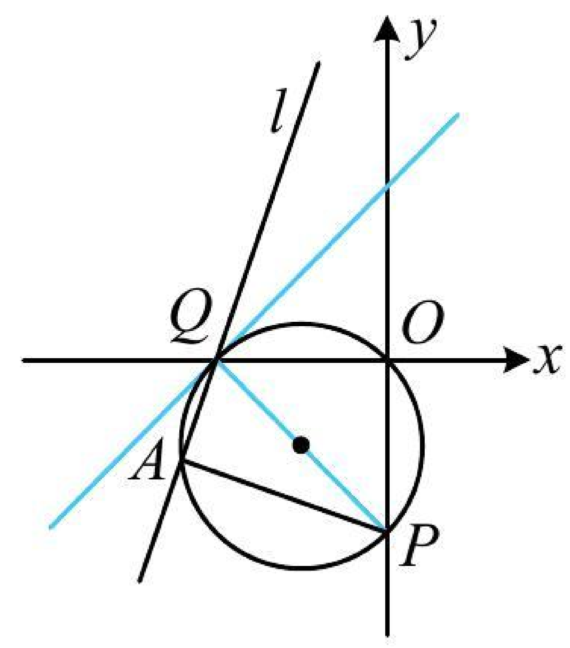
解法 2：观察发现直线过定点，故也可考虑画图分析距离的最大值，先在图中把该距离作出来，

记直线 $y=k(x+1)$ 为 l，则 l 过定点 $Q(-1,0)$，记 $P(0,-1)$，如图，作 $PA\perp l$ 于 A，

我们就是要分析 $|PA|$ 的最大值，因为 P 是定点，所以找 A 的轨迹，

注意到当 l 绕点 Q 旋转的过程中，始终有 $PA\perp AQ$，所以点 A 在以 PQ 为直径的圆上运动，

故当 A 与 Q 重合时，$|AP|$取得最大值，且最大值为$|PQ|=\sqrt{2}$.



8.（★★★）已知实数 x，y 满足 $x^2+y^2=1$，则$|x+y+2|$的取值范围是_____.

答案：$[2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}]$

解析：看到$|x+y+2|$，想到点到直线的距离公式，但还缺分母部分，于是凑分母，

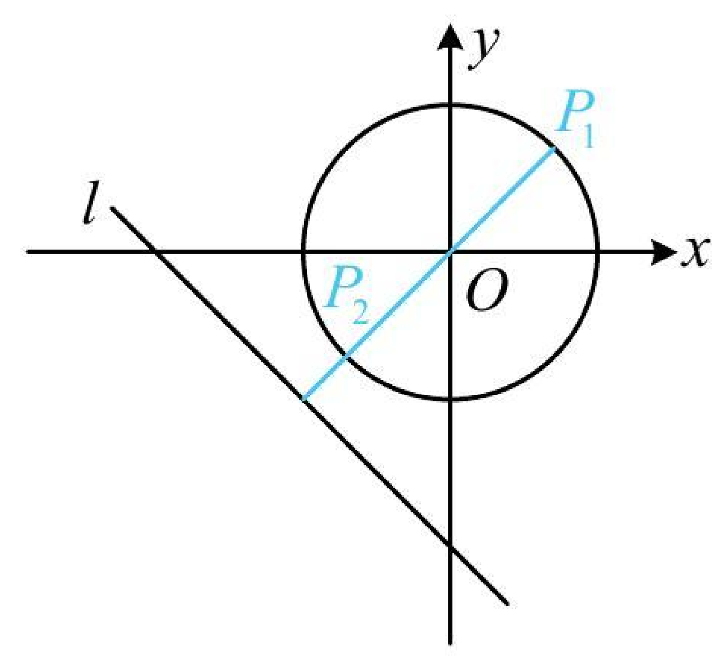
$|x+y+2|=\sqrt{2}\cdot\dfrac{|x+y+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}$，记 $d=\dfrac{|x+y+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}$，则$|x+y+2|=\sqrt{2}d$，

其中 d 表示动点 $P(x,y)$到定直线 $l:x+y+2=0$的距离，先画图看看，

因为 x，y 满足 $x^2+y^2=1$，所以点 P 可在如图所示的单位圆上运动，

由图可知，d 的最大、最小值分别在 P_1， P_2 处取得，原点 O 到直线 l 的距离为 $\dfrac{|2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$，

所以 $d_{\min}=\sqrt{2}-1$， $d_{\max}=\sqrt{2}+1$，故$|x+y+2|=\sqrt{2}d\in[2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}]$.



【反思】①求 $|Ax+By+C|$ 的最值，可将其凑成 $\sqrt{A^2+B^2}\cdot\dfrac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，转化为点 (x,y) 到直线 $Ax+By+C=0$的距离来分析；②本题也可用三角换元来做.